ENSA-ALHOCEIMA **ANALYSE 4**
CPII. **SEMESTRE 4**

Exercice 1

a) ***Pour*** $\boldsymbol{\omega_1 = 2xy\,dx + x^2\,dy}$ ***, on pose***

$$\begin{cases} P(x,y) = 2xy \\ Q(x,y) = x^2 \end{cases}$$

Il est claire que $D_{\omega_1} = \mathbb{R}^2$ *qui est un ouvert étoilé. Par suite il suffit de montrer que* ω_1 *est fermée.*

On a $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2x \quad et \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2x.$

D'ou ω_1 *est fermée et donc* ω_1 *est exacte.*

Cherchons donc f telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = 2xy \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = x^2 \quad (2) \end{cases}$$

En intégrant (1) *par rapport à x, on trouve*

$$f(x,y) = x^2y + k(y) \quad (3)$$

avec k est une fonction en y et ne dépend pas de x.

On dérive (3) *par rapport à y, on obtient*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + k'(y)$$

Or d'après (2)*, on aboutit à:* $x^2 + k'(y) = x^2.$

Ce qui implique que $k'(y) = 0$ *et par suite k est une constante.*

Finalement,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2y + C$$

b) ***Pour*** $\boldsymbol{\omega_2 = xy\,dx - z\,dy + xz\,dz}$ ***, on pose***

$$\begin{cases} P(x,y,z) = xy \\ Q(x,y,z) = -z \\ R(x,y,z) = xz \end{cases}$$

Pour montrer que la forme différentielle ω_2 *est exacte, il suffit de montrer qu'elle est fermée puisque* $D_{\omega_2} = \mathbb{R}^3$ *qui est un ouvert étoilé.*

On a $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = x \quad et \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) = 0$*, donc*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)$$

On en déduit donc que ω_2 *n'est pas fermée et par suite elle n'est pas exacte.*

c) ***Pour*** $\boldsymbol{\omega_3 = 2xe^{x^2-y}\,dx - 2e^{x^2-y}\,dy}$ ***, on pose***

$$\begin{cases} P(x,y) = 2xe^{x^2-y} \\ Q(x,y) = -2e^{x^2-y} \end{cases}$$

On a donc $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2xe^{x^2-y} \quad et \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -4xe^{x^2-y}.$

D'où, ω_3 n'est pas fermée et par suite elle n'est pas exacte.

d) ***Pour*** $\boldsymbol{\omega_4 = yz^2\,dx + (xz^2 + z)\,dy + (2xyz + 2z + y)\,dz}$ ***, on pose***

$$\begin{cases} P(x,y,z) = yz^2 \\ Q(x,y,z) = xz^2 + z \\ R(x,y,z) = 2xyz + 2z + y \end{cases}$$

Comme précédemment, pour montrer que ω_4 est exacte, il suffit de montrer qu'elle est fermée puisque son domaine de définition est un ouvert étoilé.

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = z^2 & et \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) = z^2 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = 2yz & et \quad \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = 2yz \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = 2xz + 1 & et \quad \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) = 2xz + 1 \end{cases}$$

Donc ω_4 est exacte.

Pour intégrer ω_4, on doit résoudre le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$chercher\ une\ fonction\ f\ telle\ que: \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz^2 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz^2 + z & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2xyz + 2z + y & (3) \end{cases}$$

En intégrant (1) par rapport à x, on trouve

$$f(x,y,z) = xyz^2 + k(y,z) \quad (4)$$

Avec k est une fonction en (y,z) et ne dépend pas de x.

Dérivons (4) par rapport à y et identifions la formule obtenue avec (2), on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz^2 + \frac{\partial k}{\partial y}(y,z) = xz^2 + z$$

Ce qui implique que:

$$\frac{\partial k}{\partial y}(y,z) = z \qquad \Longrightarrow \quad k(y,z) = yz + l(z)$$

Avec l est une fonction en z.

Par suite, on aboutit à

$$f(x,y,z) = xyz^2 + yz + l(z) \quad (5)$$

Dérivons (5) par rapport à z et identifions la formule obtenue avec (3):

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2xyz + y + l'(z) = 2xyz + 2z + y$$

D'où, $l'(z) = 2z$ et par suite

$$l(z) = z^2 + C$$

avec C est une constante.

Finalement, on obtient:

$$f(x,y,z) = xyz^2 + yz + z^2 + C$$

Exercice 2

On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta = \Psi_1(r,\theta,\varphi) \\ y = r\sin\varphi\sin\theta = \Psi_2(r,\theta,\varphi) \\ z = r\cos\varphi = \Psi_3(r,\theta,\varphi) \end{cases}$$

1- Calculons dx, dy et dz:

On a

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial r}(r,\theta,\varphi)dr + \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi)d\theta + \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi)d\varphi \\ dy = \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial r}(r,\theta,\varphi)dr + \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi)d\theta + \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi)d\varphi \\ dz = \dfrac{\partial\Psi_3}{\partial r}(r,\theta,\varphi)dr + \dfrac{\partial\Psi_3}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi)d\theta + \dfrac{\partial\Psi_3}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi)d\varphi \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{cases} dx = \sin\varphi\cos\theta\,dr - r\sin\varphi\sin\theta\,d\theta + r\cos\varphi\cos\theta\,d\varphi \\ dy = \sin\varphi\sin\theta\,dr + r\sin\varphi\cos\theta\,d\theta + r\cos\varphi\sin\theta\,d\varphi \\ dz = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi \end{cases}$$

2- Calculons : $xdx + ydy + zdz$

Comme $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, *alors*

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 2rdr$$

D'où le résultat.

3- En déduire : $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}$ *et* $\frac{\partial r}{\partial z}$.

On sait que

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz$$

Donc d'après la question précédente, on trouve

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad et \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Exercice 3

On considère la forme différentielle : $\omega = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy$

1- Posons

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 + y^2 + 2x \\ Q(x,y) = 2y \end{cases}$$

On a $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y$ *et* $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$.

Donc ω n'est pas fermée et par suite elle n'est pas exacte.

2- La forme différentielle $\psi(x)\omega$ est exacte si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\psi(x)P(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\psi(x)Q(x,y)\big) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\psi(x)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \psi'(x)Q(x,y) + \psi(x)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Ce qui est équivalent à

$$2y\psi(x) = 2y\psi'(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi'(x) = \psi(x)$$

Par suite, $\psi(x) = Ce^x$ avec C est une constante.

3- Cherchons une fonction f telle que : $\psi(x)\omega = df$.

On a donc le système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \psi(x)P(x,y) = Ce^x(x^2+y^2+2x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \psi(x)Q(x,y) = 2yCe^x \end{cases}$$

En intégrant la première équation par rapport à x, on trouve

$$f(x,y) = Ce^x(x^2+y^2) + k(y)$$

Avec k est une fonction en y.

En suite, on dérive cette dernière formule par rapport à y et on l'identifie à la deuxième équation du système précédent:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yCe^x + k'(y) = 2yCe^x$$

D'où, $k'(y) = 0$ et $k(y) = D$ est une constante.

Finalement, on trouve

$$f(x,y) = Ce^x(x^2+y^2) + D$$